Eine Aufspaltung von Windung und Krümmung in affin zusammenhängenden Räumen

Von HANS REICHARDT in Berlin

L. Rédei zum 60. Geburtstag

Bei der Herleitung der Verallgemeinerungen der Frenetschen Formeln, des GAUSS'schen Theorema egregium und der Formeln von CODAZZI—MAINARDI in der Theorie der Teilräume n-dimensionaler Riemannscher Räume[1]) spielt die direkte Zerlegung des lokalen n-dimensionalen Vektorraumes, wie sie den Tangenten- und Schmiegräumen des Teilraumes entspricht, eine wesentliche Rolle. Im folgenden wird sich zeigen, daß man ein ganz ähnliches, nur wesentlich allgemeineres System von Formeln und Sätzen bekommt, wenn man in jedem Punkt einer Teilmannigfaltigkeit eines affin zusammenhängenden Raumes der Dimension n eine direkte Zerlegung des n-dimensionalen lokalen Vektorraumes vornimmt. Windung und Krümmung des ganzen Raumes spalten sich dann auf in „Krümmungstensoren", die zu den linearen Übertragungen gehören, die den einzelnen direkten Summanden entsprechen, sowie in infinitesimale Abbildungen, die jeden direkten Summanden in jeden anderen abbilden, und in gewisse alternierende Differentiale davon.

I. Interne Differentiation

Es sei $\mathfrak{A}$ ein affin zusammenhängender Raum und $\mathfrak{V}$ sein lokaler Vektorraum in einem beliebigen Punkte P von $\mathfrak{A}$. Ausgangspunkt für unsere Betrachtungen ist eine direkte Zerlegung von $\mathfrak{V}$:

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{V}_k .$$

Jeder Vektor $\mathfrak{a} \in \mathfrak{V}$ besitzt dementsprechend eine eindeutige Zerlegung $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 + \cdots + \mathfrak{a}_k$ mit $\mathfrak{a}_i \in \mathfrak{V}_i$. Der Übergang von $\mathfrak{a}$ zu einer Komponente ist eine lineare Abbildung N_i:

$$\mathfrak{a}_i = \mathsf{N}_i \mathfrak{a} .$$

[1]) Vgl. etwa H. REICHARDT, Zur Theorie der Teilräume Riemannscher Räume (Erscheint demnächst in der *Festschrift der Humboldt-Universität*, Berlin, 1960).

Die Bildung der Differentiale von Vektoren und Tensoren bezeichnen wir mit d. Die i-te Komponente des Differentials eines Vektors $\mathfrak{a}_j$ aus $\mathfrak{V}_j$ erscheint nun in zwei Gestalten, je nachdem, ob $i=j$ ist oder $i \neq j$, nämlich als eine „interne'' Differentiation von $\mathfrak{V}_i$ („intern'' soll andeuten, daß das Differential ganz in $\mathfrak{V}_i$ liegt) bzw. als infinitesimale lineare Abbildung von $\mathfrak{V}_j$ in $\mathfrak{V}_i$ („infinitesimal'' soll andeuten, daß die Koordinaten der linearen Abbildung in Bezug auf irgendeine Basis Pfaffsche Formen sind). Die genannte Bildung $\mathsf{N}_i d\mathfrak{a}_j$ ist nämlich erstens auf jeden Fall additiv:

$$\mathsf{N}_i d(\mathfrak{a}_j + \mathfrak{b}_j) = \mathsf{N}_i d\mathfrak{a}_j + \mathsf{N}_i d\mathfrak{b}_j,$$

und zweitens gilt, wenn f eine skalare Ortsfunktion ist:

$$\mathsf{N}_i d(\mathfrak{a}_j f) = \mathsf{N}_i (d\mathfrak{a}_j \cdot f + \mathfrak{a}_j df) = (\mathsf{N}_i d\mathfrak{a}_j) f + (\mathsf{N}_i \mathfrak{a}_j) df.$$

Ist nun speziell $i=j$, so bekommt diese Formel die Gestalt einer Produktregel für eine Differentiation:

$$\mathsf{N}_i d(\mathfrak{a}_i f) = (\mathsf{N}_i d\mathfrak{a}_i) f + \mathfrak{a}_i df,$$

während für $i \neq j$ das Ergebnis

$$\mathsf{N}_i d(\mathfrak{a}_j f) = (\mathsf{N}_i d\mathfrak{a}_j) f$$

lautet. Schreiben wir dementsprechend einfach

$$\mathsf{N}_i d\mathfrak{a}_i = D\mathfrak{a}_i$$

(D hat also verschiedene Bedeutungen, je nachdem, aus welchem Summanden $\mathfrak{V}_i$ der zu differenzierende Vektor stammt) und

$$\mathsf{N}_i d\mathfrak{a}_j = \Omega_{ij} \mathfrak{a}_j \quad \text{für} \quad i \neq j,$$

so haben wir

$$D(\mathfrak{a}_i + \mathfrak{b}_i) = D\mathfrak{a}_i + D\mathfrak{b}_i,$$

$$D(\mathfrak{a}_i f) = (D\mathfrak{a}_i) f + \mathfrak{a}_i df,$$

$$\Omega_{ij}(\mathfrak{a}_j + \mathfrak{b}_j) = \Omega_{ij}\mathfrak{a}_j + \Omega_{ij}\mathfrak{b}_j,$$

$$\Omega_{ij}(\mathfrak{a}_j f) = (\Omega_{ij}\mathfrak{a}_j) f.$$

Das heißt aber in der Tat, D, angewandt auf einen Vektor aus $\mathfrak{V}_i$, liefert ein in $\mathfrak{V}_i$ liegendes Differential (daher „internes'' Differential), während Ω_{ij} eine lineare Abbildung von $\mathfrak{V}_j$ in $\mathfrak{V}_i$ bewirkt, deren Koordinaten auf Grund der Definition von Ω_{ij} Pfaffsche Formen sind.

Diese interne Differentiation der Vektorräume $\mathfrak{V}_i$ läßt sich nun ohne weiteres auf Tensorprodukte dieser Teilräume ausdehnen, indem man von dem im affin zusammenhängenden Raum $\mathfrak{A}$ definierten Differential des Tensors die jeweilige Komponente nimmt, d. h. z. B.: Ist $\mathsf{A} \in \mathfrak{V}_i \otimes \mathfrak{V}_j \otimes \mathfrak{V}_h$, so kann man A auch als Element von $\mathfrak{V}\otimes\mathfrak{V}\otimes\mathfrak{V}$ auffassen, daher dA als Element von $\mathfrak{V}\otimes\mathfrak{V}\otimes\mathfrak{V}$ bilden und diesen Tensor, der im allgemeinen nicht in $\mathfrak{V}_i\otimes\mathfrak{V}_j\otimes\mathfrak{V}_h$ liegen wird, durch Anwendung des Kronecker—Produktes der Projektionen von $\mathfrak{V}$ in diese Teilräume in ein Element von $\mathfrak{V}_i\otimes\mathfrak{V}_j\otimes\mathfrak{V}_h$ verwandeln: Durch

$$DA=(N_i\otimes N_j\otimes N_h)dA$$

wird somit eine interne Differentiation in $\mathfrak{V}_i\otimes\mathfrak{V}_j\otimes\mathfrak{V}_h$ definiert, und ganz entsprechend geht man vor bei beliebigen solchen „gemischten" Tensoren. Des weiteren lassen sich die Kovektorräume in diese interne Differentiation einbeziehen. Als Kovektorraum $\mathfrak{V}_i^*$ von $\mathfrak{V}_i$ nimmt man den Annulator von $\mathfrak{V}_1\oplus\cdots\oplus\mathfrak{V}_{i-1}\oplus\mathfrak{V}_{i+1}\oplus\cdots\oplus\mathfrak{V}_k$. Ist dann z. B. $A\in\mathfrak{V}_i^*\otimes\mathfrak{V}_j^*\otimes\mathfrak{V}_h$, so definiert man das interne Differential von A ganz entsprechend:

$$DA=(N_i^*\otimes N_j^*\otimes N_h)dA,$$

wobei N_i^* den Übergang von $\mathfrak{V}^*$ zu seiner $\mathfrak{V}_i^*$-Komponente bedeutet. Auf Grund dieser Definition beweist man ohne Mühe sofort die Produktregel für beliebige gemischte Tensoren:

$$D(A\otimes B)=DA\otimes B+A\otimes DB.$$

Im folgenden werden außer den gewöhnlichen Tensoren über $\mathfrak{V}_1,\ldots,\mathfrak{V}_m$, $\mathfrak{V}_1^*,\ldots,\mathfrak{V}_m^*$ auch noch infinitesimale vorkommen, und zwar solche, die man auffassen kann als Tensoren, deren Koordinaten bezüglich irgendeiner Basis alternierende Differentialformen der Stufe p sind, oder auch als alternierende Differentialformen der Stufe p, deren Koordinaten Tensoren irgendeines Typus sind. Für solche infinitesimalen Tensoren oder tensorielle Differentialformen ist ein Produkt (Operationszeichen $\circ$ [2]) etwa in der zweiten Auffassung so definiert, daß die tensoriellen Koordinaten tensoriell miteinander zu multiplizieren sind. Es ist dann z. B., wenn A und B gewöhnliche Tensoren beliebiger Typen und φ,χ alternierende Differentialformen beliebiger Stufen sind,

$$(A\varphi)\circ(B\chi)=(A\otimes B)\varphi\wedge\chi;$$

für gewöhnliche Tensoren reduziert sich dieses Produkt auf das tensorielle, $A\circ B=A\otimes B$, und für Differentialformen auf das äußere, $\varphi\circ\chi=\varphi\wedge\chi$.

Außerdem existiert für diese Gebilde ein äußeres Differential. Liegt z. B. Ω in $\mathfrak{V}_i\otimes\mathfrak{V}_j^*$, so ist Ω Summe von Produkten der Gestalt $A\omega$, wobei A ein gewöhnliches Element aus $\mathfrak{V}_i\otimes\mathfrak{V}_j^*$ und ω eine Differentialform der Stufe p ist. Dann gilt

$$d\wedge(A\omega)=(dA)\wedge\omega+A\,d\wedge\omega.$$

[2]) Aus drucktechnischen Gründen wird hier das Zeichen $\circ$ verwendet anstelle des sonst von mir benützten, mit einem Kreis umgebenen $\wedge$.

Jedoch wird dieses Differential im allgemeinen kein Element von $\mathfrak{V}_i \otimes \mathfrak{V}_j^*$ mehr sein, sondern nur als Element von $\mathfrak{V} \otimes \mathfrak{V}^*$ aufgefaßt werden können. Zu einem internen, d. h. in $\mathfrak{V}_i \otimes \mathfrak{V}_j^*$ liegenden Differential kann man es nun machen, indem man das Kronecker-Produkt $\mathsf{N}_i \otimes \mathsf{N}_j^*$ darauf anwendet. Es wird daher definiert:

$$D \wedge \Omega = (\mathsf{N}_i \otimes \mathsf{N}_j^*) d \wedge \Omega.$$

Speziell ist also dann

$$D \wedge (\mathsf{A}\omega) = (D\mathsf{A}) \wedge \omega + \mathsf{A} d \wedge \omega.$$

Aus der üblichen Produktregel folgt hier die entsprechende für das interne alternierende Differential:

$$D \wedge (\Omega_1 \circ \Omega_2) = (D \wedge \Omega_1) \circ \Omega_2 + (-1)^p \Omega_1 \circ D \wedge \Omega_2,$$

wobei p die Stufenzahl der (tensoriellen) Differentialform Ω_1 ist.

II. Die Ableitungsgleichungen und Integrabilitätsbedingungen

Ist dP das vektorielle Bogenelement in dem affin zusammenhängenden Raum $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ eine Basis des lokalen Vektorraumes $\mathfrak{V}$ von P, so lauten die Ableitungsgleichungen (unter Beachtung der üblichen Summenkonvention)

(1) $$dP = \mathfrak{e}_\varkappa \sigma^\varkappa,$$

wobei die $\sigma^\varkappa$ eine Basis der Pfaffschen Formen über $\mathfrak{A}$ bilden, sowie

(2) $$d\mathfrak{e}_\lambda = \mathfrak{e}_\varkappa \tau^\varkappa{}_\lambda.$$

Bilden $\mathfrak{w}^1, \ldots, \mathfrak{w}^n$ die zu $\mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n$ duale Basis, so folgt in bekannter Weise

$$d\mathfrak{w}^\varkappa = -\tau^\varkappa{}_\lambda \mathfrak{w}^\lambda.$$

Die Grundgleichungen für $\mathfrak{A}$ lauten dann[3])

(3) $$d \wedge \sigma^\varkappa + \tau^\varkappa{}_\lambda \wedge \sigma^\lambda = \omega^\varkappa,$$

(4) $$d \wedge \tau^\varkappa{}_\lambda + \tau^\varkappa{}_\mu \wedge \tau^\mu{}_\lambda = \omega^\varkappa{}_\lambda,$$

wobei die $\omega^\varkappa$ und $\omega^\varkappa{}_\lambda$ die Koordinaten des Windungs- bzw. des Krümmungstensors von $\mathfrak{A}$ sind. Windung bzw. Krümmung fassen wir dabei als Vektor $\mathfrak{t} = \mathfrak{e}_\varkappa \omega^\varkappa$ bzw. als zweistufigen Tensor $\mathsf{K} = \mathfrak{e}_\varkappa \otimes \mathfrak{w}^\lambda \omega^\varkappa{}_\lambda$ mit zweistufigen Differentialformen als Koordinaten auf. Es ist also

(5) $$\mathfrak{t} = \mathfrak{e}_\varkappa (d \wedge \sigma^\varkappa + \tau^\varkappa{}_\lambda \wedge \sigma^\lambda),$$

(6) $$\mathsf{K} = \mathfrak{e}_\varkappa \otimes \mathfrak{w}^\lambda (d \wedge \tau^\varkappa{}_\lambda + \tau^\varkappa{}_\mu \wedge \tau^\mu{}_\lambda).$$

[3]) Vgl. etwa meine *Vorlesungen über Vektor- und Tensorrechnung* (Berlin, 1957), Kap. XI.

Es sei nun in jedem Punkt einer m-dimensionalen in $\mathfrak{A}$ gelegenen Fläche $\mathfrak{F}$ eine direkte Aufspaltung des lokalen Vektorraumes $\mathfrak{V}$ von $\mathfrak{A}$ gegeben:

$$\mathfrak{V} = \mathfrak{V}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{V}_k. \tag{7}$$

Für eine Basis von $\mathfrak{V}_1$ verwenden wir die Indizes α, β, γ, d. h. $\mathfrak{e}_\alpha$ durchläuft eine Basis von $\mathfrak{V}_1$, ebenso $\mathfrak{e}_\beta$ und auch $\mathfrak{e}_\gamma$, entsprechend $\mathfrak{e}_\iota, \mathfrak{e}_\varkappa, \mathfrak{e}_\lambda$ in $\mathfrak{V}_2$, $\mathfrak{e}_\mu, \mathfrak{e}_\nu, \mathfrak{e}_\varrho$ in $\mathfrak{V}_3, \ldots$.

Lassen wir P nur auf $\mathfrak{F}$ variieren, so spaltet sich die erste Ableitungsgleichung (1) auf in

$$dP = \mathfrak{e}_\alpha \sigma^\alpha + \mathfrak{e}_\iota \sigma^\iota + \mathfrak{e}_\mu \sigma^\mu + \cdots,$$

wobei die $\sigma^\alpha, \sigma^\iota, \sigma^\mu, \ldots$ Pfaffsche Formen über $\mathfrak{F}$ sind. Die Summenkonvention wird also für jedem Vektorraum $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \mathfrak{V}_3, \ldots$ einzeln angewendet. Man kann dafür unter Benutzung der Projektionsoperatoren $\mathsf{N}_1, \mathsf{N}_2, \ldots$, die den Übergang von $\mathfrak{V}$ zu seinen Komponenten vermitteln, auch schreiben:

$$\mathsf{N}_1 dP = \mathfrak{e}_\alpha \sigma^\alpha, \quad \mathsf{N}_2 dP = \mathfrak{e}_\iota \sigma^\iota, \quad \mathsf{N}_3 dP = \mathfrak{e}_\mu \sigma^\mu, \ldots. \tag{8}$$

Ebenso spalten sich die übrigen Ableitungsgleichungen (2) in k Serien auf:

$$\begin{aligned} d\mathfrak{e}_\alpha &= \mathfrak{e}_\beta \tau^\beta{}_\alpha + \mathfrak{e}_\iota \tau^\iota{}_\alpha + \mathfrak{e}_\mu \tau^\mu{}_\alpha + \cdots, \\ d\mathfrak{e}_\iota &= \mathfrak{e}_\alpha \tau^\alpha{}_\iota + \mathfrak{e}_\varkappa \tau^\varkappa{}_\iota + \mathfrak{e}_\mu \tau^\mu{}_\iota + \cdots, \\ d\mathfrak{e}_\mu &= \mathfrak{e}_\alpha \tau^\alpha{}_\mu + \mathfrak{e}_\iota \tau^\iota{}_\mu + \mathfrak{e}_\nu \tau^\nu{}_\mu + \cdots, \quad \text{usw.} \end{aligned}$$

wofür man unter Benutzung des Zeichens D für die interne Differentiation und der Abbildungen Ω_{ij} von $\mathfrak{V}_j$ in $\mathfrak{V}_i$ auch schreiben kann:

$$\begin{aligned} &D\mathfrak{e}_\alpha = \mathfrak{e}_\beta \tau^\beta{}_\alpha, && \Omega_{21}\mathfrak{e}_\alpha = \mathfrak{e}_\iota \tau^\iota{}_\alpha, && \Omega_{31}\mathfrak{e}_\alpha = \mathfrak{e}_\mu \tau^\mu{}_\alpha, \ldots, \\ &\Omega_{12}\mathfrak{e}_\iota = \mathfrak{e}_\alpha \tau^\alpha{}_\iota, && D\mathfrak{e}_\iota = \mathfrak{e}_\varkappa \tau^\varkappa{}_\iota, && \Omega_{32}\mathfrak{e}_\iota = \mathfrak{e}_\mu \tau^\mu{}_\iota, \ldots, \\ &\Omega_{13}\mathfrak{e}_\mu = \mathfrak{e}_\alpha \tau^\alpha{}_\mu, && \Omega_{23}\mathfrak{e}_\mu = \mathfrak{e}_\iota \tau^\iota{}_\mu, && D\mathfrak{e}_\mu = \mathfrak{e}_\nu \tau^\nu{}_\mu, \ldots, \quad \text{usw.} \end{aligned} \tag{9}$$

Wählt man im Fall einer Kurve des n-dimensionalen euklidischen Raumes die direkte Zerlegung von $\mathfrak{V}$ in orthogonale Komponenten so, daß $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_1 \oplus \mathfrak{V}_2, \mathfrak{V}_1 \oplus \mathfrak{V}_2 \oplus \mathfrak{V}_3, \ldots$ den 1-dimensionalen Tangentenraum, den 2-, 3-, …,-dimensionalen Schmiegraum bilden, so reduzieren sich diese Gleichungen auf die Frenetschen Formeln.

Weiter lassen sich jetzt die Abbildungen Ω_{ij} auf die Komponenten von $d\mathsf{N}_1, d\mathsf{N}_2, \ldots$ zurückführen. Es ist nämlich

$$\mathsf{N}_1 \mathfrak{e}_\alpha = \mathfrak{e}_\alpha, \quad \mathsf{N}_1 \mathfrak{e}_\iota = 0, \quad \mathsf{N}_1 \mathfrak{e}_\mu = 0, \ldots$$

also $\mathsf{N}_1 = \mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{w}^\alpha$, und daher

$$d\mathsf{N}_1 = \mathfrak{e}_\beta \tau^\beta{}_\alpha \otimes \mathfrak{w}^\alpha + \mathfrak{e}_\iota \tau^\iota{}_\alpha \otimes \mathfrak{w}^\alpha + \mathfrak{e}_\mu \tau^\mu{}_\alpha \otimes \mathfrak{w}^\alpha + \cdots$$
$$- \mathfrak{e}_\alpha \otimes \tau^\alpha{}_\beta \mathfrak{w}^\beta - \mathfrak{e}_\alpha \otimes \tau^\alpha{}_\iota \mathfrak{w}^\iota - \mathfrak{e}_\alpha \otimes \tau^\alpha{}_\mu \mathfrak{w}^\mu - \cdots .$$

Andererseits ist

$$\Omega_{12} \mathfrak{e}_\iota = \mathsf{N}_1 d\mathfrak{e}_\iota = \mathsf{N}_1(\mathfrak{e}_\alpha \tau^\alpha{}_\iota + \mathfrak{e}_\varkappa \tau^\varkappa{}_\iota + \cdots) = \mathfrak{e}_\alpha \tau^\alpha{}_\iota$$

und daher

$$\Omega_{12} = \mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{w}^\iota \tau^\alpha{}_\iota .$$

Ebenso gilt

$$\Omega_{13} = \mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{w}^\mu \tau^\alpha{}_\mu ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(10) \qquad \Omega_{21} = \mathfrak{e}_\iota \otimes \mathfrak{w}^\alpha \tau^\iota{}_\alpha ,$$
$$\Omega_{31} = \mathfrak{e}_\mu \otimes \mathfrak{w}^\alpha \tau^\mu{}_\alpha , \quad \text{usw.},$$

und daher geht die obige Formel für $d\mathsf{N}_1$ über in

$$d\mathsf{N}_1 = \Omega_{21} + \Omega_{31} + \cdots - \Omega_{12} - \Omega_{13} - \cdots .$$

Also ist

$$\Omega_{21} = (\mathsf{N}_2 \otimes \mathsf{N}_1^*) d\mathsf{N}_1 ,$$
$$\Omega_{31} = (\mathsf{N}_3 \otimes \mathsf{N}_1^*) d\mathsf{N}_1 ,$$
$$(11) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\Omega_{12} = -(\mathsf{N}_1 \otimes \mathsf{N}_2^*) d\mathsf{N}_1 ,$$
$$\Omega_{13} = -(\mathsf{N}_1 \otimes \mathsf{N}_3^*) d\mathsf{N}_1 , \quad \text{usw},$$

Mit Hilfe dieser Formeln können wir nun das Ergebnis der Aufspaltung der Integrabilitätsbedingungen invariant deuten. Die erste Serie (3) bekommt zunächst die Form

$$d \wedge \sigma^\alpha + \tau^\alpha{}_\beta \wedge \sigma^\beta + \tau^\alpha{}_\iota \wedge \sigma^\iota + \tau^\alpha{}_\mu \wedge \sigma^\mu + \cdots = \omega^\alpha ,$$
$$d \wedge \sigma^\iota + \tau^\iota{}_\alpha \wedge \sigma^\alpha + \tau^\iota{}_\varkappa \wedge \sigma^\varkappa + \tau^\iota{}_\mu \wedge \sigma^\mu + \cdots = \omega^\iota ,$$
$$d \wedge \sigma^\mu + \tau^\mu{}_\alpha \wedge \sigma^\alpha + \tau^\mu{}_\iota \wedge \sigma^\iota + \tau^\mu{}_\nu \wedge \sigma^\nu + \cdots = \omega^\mu ,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Nach (10) ist $\Omega_{12} = \mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{w}^\iota \tau^\alpha{}_\iota$, also

$$\Omega_{12} \circ \mathsf{N}_2 dP = (\mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{w}^\iota \tau^\alpha{}_\iota) \circ (\mathfrak{e}_\varkappa \sigma^\varkappa) \quad = \mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{w}^\iota \otimes \mathfrak{e}_\varkappa \tau^\alpha{}_\iota \wedge \sigma^\varkappa .$$

Bezeichnen wir mit Y_ι die zu $\mathfrak{B}_\iota \otimes \mathfrak{B}_\iota^*$ gehörende Verjüngung, so gilt

$$\mathsf{Y}_2(\Omega_{12} \circ \mathsf{N}_2 dP) = \mathfrak{e}_\alpha \tau^\alpha{}_\iota \wedge \sigma^\iota ,$$

und setzen wir schließlich noch

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{t}_1 &= \mathfrak{e}_\alpha (d \wedge \sigma^\alpha + \tau^\alpha{}_\beta \wedge \sigma^\beta), \\
\mathfrak{t}_2 &= \mathfrak{e}_\iota (d \wedge \sigma^\iota + \tau^\iota{}_\varkappa \wedge \sigma^\varkappa), \qquad (12)\\
\mathfrak{t}_3 &= \mathfrak{e}_\mu (d \wedge \sigma^\mu + \tau^\mu{}_\nu \wedge \sigma^\nu), \quad \text{usw.},
\end{aligned}
$$

so gehen die obigen Ableitungsgleichungen in die folgenden über:

$$
\begin{aligned}
&\mathfrak{t}_1 + \mathsf{Y}_2(\Omega_{12} \circ \mathsf{N}_2 dP) + \mathsf{Y}_3(\Omega_{13} \circ \mathsf{N}_3 dP) + \cdots = \mathsf{N}_1 \mathfrak{t}, \\
&\mathsf{Y}_1(\Omega_{21} \circ \mathsf{N}_1 dP) + \mathfrak{t}_2 + \mathsf{Y}_3(\Omega_{23} \circ \mathsf{N}_3 dP) + \cdots = \mathsf{N}_2 \mathfrak{t}, \qquad (13)\\
&\mathsf{Y}_1(\Omega_{31} \circ \mathsf{N}_1 dP) + \mathsf{Y}_2(\Omega_{32} \circ \mathsf{N}_2 dP) + \mathfrak{t}_3 + \cdots = \mathsf{N}_3 \mathfrak{t}, \quad \text{usw.},
\end{aligned}
$$

aus denen die Koordinatenunabhängigkeit von $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3, \ldots$ hervorgeht. Durch den Vergleich der Gleichung (5) mit den Gleichungen (12) wird man veranlaßt, $\mathfrak{t}_1, \mathfrak{t}_2, \mathfrak{t}_3, \ldots$ als die zu den Teilräumen $\mathfrak{V}_1, \mathfrak{V}_2, \mathfrak{V}_3, \ldots$ gehörenden Windungen zu bezeichnen.

Im GAUSS'schen Fall (Fläche im 3-dimensionalen euklidischen Raum) wird man $\mathfrak{V}_1$ als Menge der Tangentialvektoren und $\mathfrak{V}_2$ als Gesamtheit der Normalenvektoren nehmen. Dann tritt nur noch Ω_{12} auf, $\mathfrak{t}, \mathfrak{t}_1$ und $\mathfrak{t}_2$ werden zu 0, und die Gleichungen (13) liefern eine Symmetrieeigenschaft für Ω_{12}, deren Bedeutung man sich am einfachsten klar macht, wenn man in Ω_{12} die Basisdifferentiale σ^α durch die Basiskovektoren $\mathfrak{w}^\alpha$ ersetzt. Dann geht nämlich Ω_{12} in einen gewöhnlichen, im wesentlichen zweistufigen Tensor über. Dieser erweist sich dann (eben auf Grund der Gleichungen (13)) als symmetrisch, und seine charakteristischen Wurzeln und Hauptachsenrichtungen sind die Hauptkrümmungen und die Hauptkrümmungsrichtungen.

Addiert man die Gleichungen (13) zueinander, so ergibt sich

$$
\sum_{i=1}^{k} \mathfrak{t}_i + \sum_{i \neq j} \mathsf{Y}_i(\Omega_{ji} \circ \mathsf{N}_i dP) = \mathfrak{t},
$$

woraus man umgekehrt durch Übergang zu den einzelnen Komponenten die sämtlichen Gleichungen (13) wieder zurückgewinnen kann.

In der gleichen Weise behandeln wir nun die zweite Serie (4) von Integrabilitätsbedingungen. Es entstehen dabei zwei verschiedene Typen von Gleichungen, die sich teils auf die interne Differentiation D, teils auf die Abbildungen Ω_{ij} beziehen. Zunächst ist

$$
d \wedge \tau^\alpha{}_\beta + \tau^\alpha{}_\gamma \wedge \tau^\gamma{}_\beta + \tau^\alpha{}_\iota \wedge \tau^\iota{}_\beta + \tau^\varkappa{}_\mu \wedge \tau^\mu{}_\beta + \cdots = \omega^\alpha{}_\beta,
$$

und weiter gilt

$$
\begin{aligned}
\mathsf{Y}_2(\Omega_{12} \circ \Omega_{21}) &= \mathsf{Y}_2((\mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{w}^\iota \tau^\alpha{}_\iota) \circ (\mathfrak{e}_\varkappa \otimes \mathfrak{w}^\beta \tau^\varkappa{}_\beta)) \\
&= \mathsf{Y}_2(\mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{w}^\iota \otimes \mathfrak{e}_\varkappa \otimes \mathfrak{w}^\beta \tau^\alpha{}_\iota \wedge \tau^\varkappa{}_\beta) = \mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{w}^\beta \tau^\alpha{}_\iota \wedge \tau^\iota{}_\beta .
\end{aligned}
$$

Setzen wir also

$$\mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{w}^\beta (d \wedge \tau^\alpha{}_\beta + \tau^\alpha{}_\gamma \wedge \tau^\gamma{}_\beta) = \mathsf{K}_1, \tag{14}$$

so ergibt sich

$$\mathsf{K}_1 + \mathsf{Y}_2(\Omega_{12} \circ \Omega_{21}) + \mathsf{Y}_3(\Omega_{13} \circ \Omega_{31}) + \cdots = (\mathsf{N}_1 \otimes \mathsf{N}_1^\dagger)\mathsf{K}, \tag{15}$$

und hieraus folgt, daß K_1 unabhängig von der Basiswahl ist. (Im GAUSS'schen Fall erkennt man leicht, daß diese Formel das Theorema egregium liefert.)

Der Tensor K_1 spielt eine Rolle, wenn man die zu der internen Differentiation von $\mathfrak{V}_1$ gehörende Übertragung untersucht. Ist nämlich längs einer auf unserer Fläche $\mathfrak{F}$ liegenden Kurve $\mathfrak{C}$ für einen dauernd in $\mathfrak{V}_1$ liegenden Vektor $\mathfrak{a}_1$ die Gleichung $D\mathfrak{a}_1 = 0$ erfüllt, so sagen wir, $\mathfrak{a}_1$ sei konstant auf $\mathfrak{C}$ oder werde längs $\mathfrak{C}$ übertragen. Man sieht, wie sonst üblich, leicht ein, daß diese Übertragung linear ist, d. h. daß sie einen ganz bestimmten Isomorphismus zwischen den zu den Punkten von $\mathfrak{C}$ gehörenden Vektorräumen $\mathfrak{V}_1$ vermittelt.

Das Ergebnis der Übertragung wird jedoch nicht nur von Anfangs- und Endpunkt, sondern vom ganzen Verlauf der Kurve $\mathfrak{C}$ abhängen. Überträgt man also einen Vektor aus $\mathfrak{V}_1$ längs einer von P ausgehenden geschlossenen Kurve $\mathfrak{C}$, so wird man im allgemeinen einen vom identischen verschiedenen Automorphismus des zu P gehörenden Vektorraumes $\mathfrak{V}_1$ erhalten. Nimmt man speziell für $\mathfrak{C}$ eine sehr kleine geschlossene Kurve, so wird dieser Automorphismus nur wenig vom identischen abweichen, und diese Abweichung wird in erster Näherung durch K_1 beschrieben, wobei in K_1 derjenige Bivektor einzusetzen ist, der dem umlaufenen Flächenelement entspricht. Man wird daher K_1 als den zu der in $\mathfrak{V}_1$ definierten linearen Übertragung gehörenden Krümmungstensor bezeichnen.

Geht man von der formelmäßigen Definition (14) von K_1 aus, so erhält man durch interne alternierende Differentiation nach kurzer Rechnung eine Formel, die im GAUSS'schen Fall, dort jedoch noch kombiniert mit einer von der Existenz der Metrik herrührenden Symmetrie, auf eine Verallgemeinerung der Identität von Bianchi führt, nämlich

$$\begin{aligned} &D \wedge \mathsf{K}_1 = 0, \\ &D \wedge \mathsf{K}_2 = 0, \\ &D \wedge \mathsf{K}_3 = 0, \quad \text{usw.} \end{aligned} \tag{16}$$

Den zweiten Typus von Gleichungen erhält man folgendermaßen: Es ist z. B.

$$d \wedge \tau^\alpha{}_\iota + \tau^\alpha{}_\beta \wedge \tau^\beta{}_\iota + \tau^\alpha{}_\varkappa \wedge \tau^\varkappa{}_\iota + \tau^\alpha{}_\mu \wedge \tau^\mu{}_\iota + \cdots = \omega^\alpha{}_\iota.$$

Nun ist

$$
\begin{aligned}
D \wedge \Omega_{12} &= D \wedge (\mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{w}^\iota \tau^\alpha{}_\iota) \\
&= D(\mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{w}^\iota) \wedge \tau^\alpha{}_\iota + \mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{w}^\iota d \wedge \tau^\alpha{}_\iota \\
&= (D\mathfrak{e}_\alpha) \otimes \mathfrak{w}^\iota \wedge \tau^\alpha{}_\iota + \mathfrak{e}_\alpha \otimes (D\mathfrak{w}^\iota) \wedge \tau^\alpha{}_\iota + \mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{w}^\iota d \wedge \tau^\alpha{}_\iota \\
&= \mathfrak{e}_\beta \tau^\beta{}_\alpha \otimes \mathfrak{w}^\iota \wedge \tau^\alpha{}_\iota - \mathfrak{e}_\alpha \otimes \tau^\iota{}_\varkappa \mathfrak{w}^\varkappa \wedge \tau^\alpha{}_\iota + \mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{w}^\iota d \wedge \tau^\alpha{}_\iota \\
&= \mathfrak{e}_\alpha \otimes \mathfrak{w}^\iota (d \wedge \tau^\alpha{}_\iota + \tau^\alpha{}_\beta \wedge \tau^\beta{}_\iota + \tau^\alpha{}_\varkappa \wedge \tau^\varkappa{}_\iota).
\end{aligned}
$$

Also geht die obige Gleichung über in

$$
D \wedge \Omega_{12} + \mathsf{Y}_3(\Omega_{13} \circ \Omega_{32}) + \cdots = (\mathsf{N}_1 \otimes \mathsf{N}_2^*)\mathsf{K}. \tag{17}
$$

Diese Gleichung reduziert sich im GAUSS'schen Fall auf die Gleichungen von CODAZZI—MAINARDI.

Addiert man sämtliche Gleichungen vom Typ (15) und (17) zueinander, so erhält man

$$
\sum_{i=1}^{k} \mathsf{K}_i + \sum_{i \neq j} D \wedge \Omega_{ij} + \sum_{i \neq h \neq j} \mathsf{Y}_h(\Omega_{ih} \circ \Omega_{hj}) = \mathsf{K}, \tag{18}
$$

und aus dieser einzigen Gleichung kann man umgekehrt durch Übergang zu den einzelnen Komponenten die Verallgemeinerungen des Theorema egregium und der Formeln von CODAZZI—MAINARDI zurückgewinnen.

Nimmt man für $\mathfrak{A}$ den gewöhnlichen affinen Raum, so lassen sich Vektoren und Tensoren integrieren, da man sie jetzt auffassen kann als Vektoren und Tensoren des zu $\mathfrak{A}$ gehörenden n-dimensionalen Vektorraumes. Speziell kann man jetzt auf tensorielle alternierende Differentialformen den Stokesschen Satz anwenden. Schreibt man z. B. eine der Gleichungen, die die Formeln von CODAZZI—MAINARDI verallgemeinern, mit $d \wedge \Omega_{12}$ statt mit $D \wedge \Omega_{12}$, d. h. addiert man zu ihr $d \wedge \Omega_{12} - D \wedge \Omega_{12}$, so erhält man nach kurzer Rechnung

$$
\begin{aligned}
d \wedge \Omega_{12} &= (\mathsf{N}_1 \otimes \mathsf{N}_2^*)\mathsf{K} \\
+ \mathsf{Y}_1\big((\Omega_{21} + \Omega_{31} + \cdots) \circ \Omega_{12}\big) &+ \mathsf{Y}_2\big(\Omega_{12} \circ (\Omega_{21} + \Omega_{23} + \cdots)\big) \\
- \mathsf{Y}_3(\Omega_{13} \circ \Omega_{32}) &- \mathsf{Y}_4(\Omega_{14} \circ \Omega_{42}) - \cdots,
\end{aligned}
$$

und hieraus folgt nach dem Stokesschen Satz, angewandt auf ein zweidimensionales Flächenstück von $\mathfrak{F}$ und seinen Rand

$$
\begin{aligned}
\int \Omega_{12} = \iint \{ & (\mathsf{N}_1 \otimes \mathsf{N}_2^*)\mathsf{K} + \mathsf{Y}_1\big((\Omega_{21} + \Omega_{31} + \cdots) \circ \Omega_{12}\big) + \\
& + \mathsf{Y}_2\big(\Omega_{12} \circ (\Omega_{21} + \Omega_{23} + \cdots)\big) - \mathsf{Y}_3(\Omega_{13} \circ \Omega_{32}) - \mathsf{Y}_4(\Omega_{14} \circ \Omega_{42}) - \cdots \}.
\end{aligned} \tag{19}
$$

Entsprechende Formeln, gebildet mit Ω_{ij}, stellen dann ein gewisses Analogon zu dem Integralsatz von GAUSS—BONNET dar.

Eine weitere Serie von Integralsätzen läßt sich in entsprechender Weise aus (16) herleiten.

(Eingegangen am 31. März 1960)